Exercice 1 : Destruction de la station Мир

Après quinze ans de fonctionnement, la station Мир a été désorbitée en 2001 par un vaisseau (nommé par la suite chasseur) qui s'est arrimé à la station pour ensuite modifier son orbite jusqu'à l'amener dans l'atmosphère terrestre. Les éléments de la station ayant résisté à la rentrée dans l'atmosphère se sont abîmés dans l'océan Pacifique.

On étudie les différentes manœuvres nécessaires. Les trajectoires seront toutes coplanaires et étudiées dans le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$, considéré galiléen. On néglige l'interaction gravitationnelle entre le chasseur et la navette. Les frottements avec l'atmosphère sont négligés dans un premier temps.

Données : Constante de gravitation universelle : $\mathscr{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$, masse de la Terre $m_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, rayon de la Terre $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$, altitude de la station $z_s = 400\,\mathrm{km}$, altitude initiale du chasseur $z_c = 200\,\mathrm{km}$, masse de l'ensemble (chasseur/station) $m_{sc} = 140 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$, $\gamma = 1{,}0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$.

1. Initialement la station est en orbite à l'altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) z_s et le chasseur sur une orbite elle aussi circulaire d'altitude z_c, avec $z_c < z_s$.

- **(a)** Déterminer l'expression de la vitesse sur une orbite circulaire d'altitude z en fonction, entre autres, de z et du rayon R_T de la Terre.
- **(b)** Déterminer de même l'expression de la période d'une orbite circulaire d'altitude z (3ᵉloi de Képler). Calculer la durée d'une orbite de la station. On admet que la période sur une orbite elliptique a la même expression que sur une orbite circulaire en remplaçant le rayon de la trajectoire par le demi grand axe a de l'ellipse.
- **(c)** Établir l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite elliptique de demi grand axe a.

2. Le chasseur doit être placé sur la même orbite circulaire d'altitude z_s que la station. On utilise pour cela une orbite de transfert elliptique.

- **(a)** Représenter sur un schéma les orbites circulaires d'altitudes z_s et z_c et l'ellipse de transfert. Établir l'expression de son demi grand axe a en fonction de R_T, z_s et z_c.
- **(b)** Le changement d'orbite s'effectue en variant quasi-instantanément la vitesse orthoradiale du chasseur en deux points de sa trajectoire. Déterminer les expressions et calculer les valeurs des deux variations de vitesse nécessaires pour placer le chasseur sur l'orbite de la station. Préciser la valeur et le sens (par un schéma) de la vitesse relative du chasseur par rapport à la station quand il rejoint celle-ci.
- **(c)** Exprimer la durée du transfert T_t en fonction de la période T_s de l'orbite de la station et des distances R_T, z_c et z_s.
- **(d)** En déduire les positions relatives de la station et du chasseur sur leur orbite à l'instant du premier changement d'orbite de ce dernier pour qu'ils se retrouvent au même point sur l'orbite de la station. On exprimera leur écart angulaire $\Delta\theta$ en fonction de z_s, z_c et R_T et on l'illustrera sur un schéma. Calculer la valeur de $\Delta\theta$.

3. On étudie maintenant l'effet de l'atmosphère sur l'ensemble solidaire (chasseur/station), de masse totale m_{sc}, dont on note v la vitesse.

- **(a)** Justifier brièvement que si les frottements sont suffisamment faibles, on pourra considérer que l'ensemble décrit une orbite circulaire dont le rayon décroît lentement et que les énergies cinétique $\mathscr{E}_{\mathrm{cin}}$ et mécanique $\mathscr{E}_{\mathrm{m}}$ vérifient $\mathscr{E}_{\mathrm{m}} = -\mathscr{E}_{\mathrm{cin}}$.
- **(b)** La force de frottement $\vec{f}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v et s'exprime selon $\vec{f} = -\gamma v \vec{v}$, avec γ une constante positive. Déduire de la question précédente l'équation différentielle d'évolution de l'altitude z.
- **(c)** Estimer la variation d'altitude de l'ensemble au cours d'une révolution et commenter la validité de l'hypothèse précédente.
- **(d)** En déduire l'expression de la durée $T(h)$ nécessaire pour la diminuer d'une distance h. Calculer la valeur de $T(h)$ pour $h = 100\,\mathrm{km}$, dans l'hypothèse (trop violente) où on peut considérer γ constant sur cette variation d'altitude.
- **(e)** Proposer une manœuvre permettant d'amener l'ensemble sur une orbite plus basse. Justifier qu'on pourra ainsi détruire la station plus rapidement.

4. On utilise une intégration numérique des équations du mouvement pour étudier le mouvement quand les frottements sont plus importants. On adaptera pour cela le code python de l'activité numérique, code `0eed-325595`.

La navette est initialement sur l'orbite circulaire de rayon $R_s = R_T + z_s$, de période T_s et de vitesse v_s et on y néglige tout d'abord les frottements.

- **(a)** Établir les équations différentielles en coordonnées cartésiennes adimensionnées, en utilisant l'angle θ et les coordonnées :
$$\rho = \frac{r}{R_s} \qquad \tau = \frac{t}{T_s},$$
et les dérivées de ρ et θ par rapport à τ. Les vitesses adimensionnées, notées u, seront exprimées en unités de R_s/T_s. Quelles sont les valeurs de u, notée u_s, et de la constante des aires adimensionnée, notée α, sur l'orbite circulaire ?
- **(b)** Résoudre ces équations différentielles. Tracer sur un même graphe la trajectoire $r/R_s;\tau$ pour une vitesse initiale orthoradiale, en $\theta = 0$:
  - $u(0) = u_s$,
  - $u(0) = \sqrt{2}u_s$,
  - $u(0) = u_s/2$,

  pour une durée d'intégration $\Delta\tau = 1$. Commenter la nature des trajectoires et les variations de la période pour les mouvements périodiques.

  On utilisera l'argument `subplot_kw={"projection" : "polar"}` de `plt.subplots` pour tracer des courbes en coordonnées polaires selon la syntaxe suivante, dans laquelle `theta` et `rho` sont des listes contenant les angles θ et les distances ρ aux mêmes instants.

```python
figtrajectoire,axtrajectoire = plt.subplots(subplot_kw={"projection" : "polar"})
axtrajectoire.plot(theta,rho)
```

  Tracer également l'évolution temporelle de α et commenter.
- **(c)** On prend désormais en compte les frottements. Adimensionner comme précédemment la nouvelle équation différentielle en y faisant apparaître une constante sans dimension β proportionnelle à γ. Résoudre cette équation différentielle et tracer, pour la condition initiale $u(0) = u_s$ en $\theta = 0$ et sur une durée $\Delta\tau = 100$.
  - Tracer la trajectoire.
  - Tracer l'évolution de l'altitude z et confirmer les résultats de l'approximation analytique des questions précédentes ;

- Tracer l'évolution de α et commenter.

(**d**) Tracer la trajectoire obtenue si :
- on conserve la valeur de β mais on prend $u(0) = u_s/2$;
- on conserve $u(0) = u_s$ mais on multiplie β par $5 \cdot 10^4$.

Exercice 2 : En hommage à Anita Ward[i]

On étudie dans cet exercice le mouvement d'une cloche musicale du type nommé « bourdon ». Il s'agit d'un objet massif placé au sommet d'un clocher, qu'on met en rotation au moyen d'une corde passant sur une « roue de volée » solidaire de son axe de rotation.

On modélise l'ensemble par un solide en rotation autour d'un axe fixe, noté Δ. Ce solide est caractérisé par sa masse m_B, son moment d'inertie J_B et le rayon R de la roue de volée sur laquelle passe la corde qu'on tire. On note G la position de son centre de masse, et θ l'angle dont il a tourné par rapport à sa position quand le bourdon est au repos, *ie* à l'aplomb sous l'axe Δ.

Fig. 1 : Vue du bourdon « Marie » installé dans la cathédrale Notre-Dame de Paris.

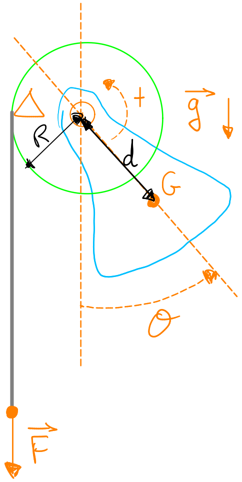

Fig. 2 : Modèle du bourdon étudié. Le vecteur $\vec{F}$ désigne la force de traction exercée par l'individu sur la corde qui passe sur la roue de rayon R, solidaire du bourdon. La longueur d est la distance entre le centre de masse G et l'axe Δ.

Données[ii] :

- accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;
- masse du bourdon $m_B = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$, rayon de la roue de volée $R = 50\,\mathrm{cm}$;
- la hauteur totale du bourdon est $1{,}2\,\mathrm{m}$ et son rayon à sa base est $60\,\mathrm{cm}$: ces deux derniers paramètres n'interviendront pas directement dans l'essentiel des calculs ultérieurs.

La corde sera toujours tendue verticalement, ne glisse pas sur la roue et on négligera sa masse. On néglige dans un premier temps tout frottement avec l'air et sur l'axe de rotation.

1. On maintient le bourdon immobile à l'angle $\theta_0 = 45°$ en exerçant une force verticale d'intensité F_0.

(**a**) Établir, en utilisant le théorème du moment cinétique, la relation entre F_0, m, g, d, R et l'angle θ_0.

(**b**) On mesure $F_0 = 9{,}7 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$. Calculer la valeur de la distance d entre l'axe et le centre de masse G. Est-il possible pour un individu (même capable d'une très grande force) de maintenir la cloche dans cette position en tirant simplement sur la corde ?

2. Le bourdon est lâché sans vitesse initiale de l'angle θ_0.

(**a**) Établir l'expression de la vitesse angulaire maximale, notée ω_0 qu'il acquiert au cours de son mouvement ultérieur en fonction entre autres de l'angle θ_0. On mesure $\omega_0 = 2{,}6\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. En déduire la valeur du moment d'inertie J_B du bourdon.

(**b**) Calculer la valeur du quotient $\sqrt{J_B/m_B}$ et préciser sa dimension. Commenter en prenant en compte les paramètres géométriques du bourdon indiqués en début d'exercice.

3. L'individu cherche à mettre en mouvement le bourdon, initialement immobile en $\theta = 0$ en sautant puis s'accrochant fermement à la corde. On suppose son saut suffisamment haut pour qu'il·elle ne touche pas le sol au cours de son mouvement ultérieur. La masse de l'individu est notée m_i. On note $\theta_{\max}$ l'angle maximal atteint par la suite par le bourdon.

(**a**) Établir l'équation vérifiée par $\theta_{\max}$.

(**b**) Établir, dans le cas $m_i \ll m_B$ l'expression de l'angle $\theta_{\max}$ au moyen d'un développement limité pour $\theta_{\max} \ll 1$. En déduire une estimation de $\theta_{\max}$ dans votre cas personnel.

4. À la recherche d'une solution plus efficace, l'individu tire vers le bas avec une force d'intensité constante d'intensité $m_i g/2$. Le bourdon est initialement au repos et atteint un nouvel angle maximal $\theta'_{\max}$.

(**a**) Adapter les résultats précédents pour déterminer l'expression de $\theta'_{\max}$ et en déduire les expressions du travail fourni par la traction ainsi que de la longueur de cette traction. Calculez ces valeurs.

(**b**) L'individu lâche la corde quand le bourdon a atteint l'angle $\theta'_{\max}$. Établir, au moyen d'un développement limité en $\theta'_{\max} \ll 1$ l'expression de la durée au bout de laquelle ce dernier repasse pour la première fois en $\theta = 0$. Calculer cette valeur.

(**c**) À chaque demi-oscillation ultérieure, l'individu exerce une nouvelle traction, dont on admet qu'elle fournit le même travail que celui calculé à la question **4a**. En déduire une borne inférieure de la durée nécessaire pour atteindre l'angle $\theta_0 = 45°$.

5. On observe que la méthode décrite précédemment ne permet pas de dépasser une amplitude d'oscillation d'angle $\theta_f = 35°$. On interprète cette limite en modélisant les frottements de l'air par un couple résistant dont l'intensité a pour expression :

$$\mathcal{M}_f = K\dot{\theta}^2,$$

---

[i] ♪♪♩♩𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥♩♩♪♩.

[ii] Les paramètres physique ne sont pas exactement ceux du bourdon photographié.

avec K une constante et $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire instantanée de rotation. On suppose qu'à l'échelle d'une oscillation le mouvement est très peu modifié par le frottement.

(**a**) Établir l'expression du travail des frottements sur une demi-oscillation d'amplitude θ_f en supposant que $\dot{\theta}$ a à chaque instant la valeur qu'elle aurait en l'absence de frottement.

(**b**) En déduire la valeur de K pour que la technique décrite à la question **4c** conduise à des oscillations d'amplitude θ_f.